государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Златоустовский индустриальный колледж им. П.П.Аносова»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для практических работ

по дисциплине Математика

для студентов специальности 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)»

2016

Методические указания для практичеких работ

по дисциплине­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­ Математика

для студентов специальности 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)»

Составитель: Литвинова Ю.Р., преподаватель математики

Рекомендовано к использованию решением методического советаГБПОУ «ЗлатИК им.П.П. Аносова»

протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_г.

**Практическая работа №1, №2**

**Тема: «Линейные операции над матрицами.**

**Действия с матрицами»**

**Цель**: закрепление практических навыков выполнения действий с матрицами

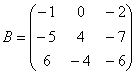
Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы.

**Обозначение:** матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image002.gif

**Пример:** рассмотрим матрицу «два на три»:

http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image004.gif

Когда говорят о размерах матрицы, то **сначала** указывают количество строк, а только потом – количество столбцов. В рассмотренном примере матрица «два на три».

Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то матрицу называют **квадратной**, например:  – матрица «три на три».

**Умножение матрицы на число**.

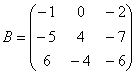
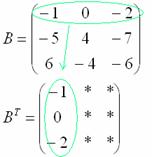
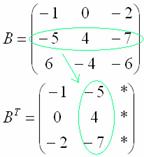
**Пример**:

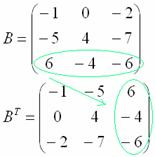
http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image034.gif

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на данное число. В данном случае – на тройку.

**Транспонирование матрицы**.

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пошаговый пример:Транспонировать матрицу Сначала переписываем первую строку в первый столбец:Потом переписываем вторую строку во второй столбец:  
И, наконец, переписываем третью строку в третий столбец:



Грубо говоря, транспонировать – это значит повернуть матрицу набок.

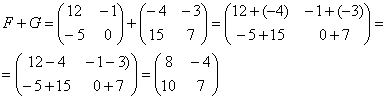
**Сумма (разность) матриц**.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

**Пример**:

Сложить матрицы http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image061.gif и http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image063.gif

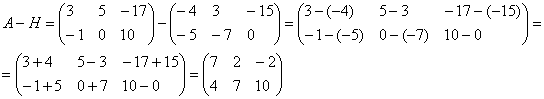
**Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:**



Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов.**

**Пример**:

Найти разность матриц http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image004_0000.gif, http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image067.gif



**Умножение матриц**.

Чтобы матрицу  http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image022_0000.gif можно было умножить на матрицу http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image076.gif нужно, **чтобы число столбцов матрицы** **http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image022_0001.gif равнялось числу строк матрицы** **http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image076_0000.gif.**

**Пример**:Умножить матрицу **http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image102.gif** на матрицу http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image082_0000.gif  
Применим формулу :

http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image105.gif .

**http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image107.gif**

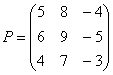
**Пример**: Умножить матрицу http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image094_0000.gif на матрицу http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image096_0000.gif

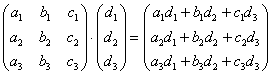
Формула: http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image109.gif

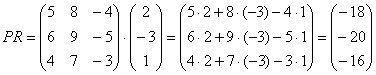
http://mathprofi.ru/f/deistviya_s_matricami_clip_image111.gif

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Переходим к матрицам третьего порядка:

Умножить матрицу  на матрицу 

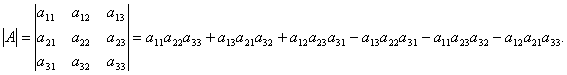
Формула очень похожа на предыдущие формулы:  




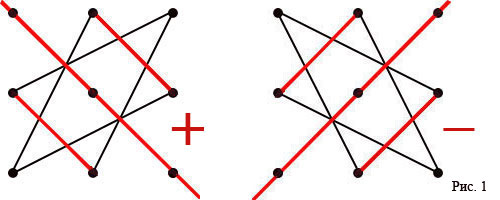
**Определитель второго порядка** есть число, получаемое следующим образом:

http://function-x.ru/chapter1/determinants_clip_image008.gif(2)

**Определитель третьего порядка** – это число, получаемое так:

(3)

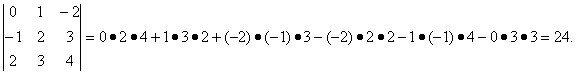
Запомнить эту формулу трудно. Однако существует простое правило, называемое правилом треугольников, которое позволяет легко воспроизвести выражение (3). Обозначая элементы определителя точками, соединим отрезками прямой те из них, которые дают произведения элементов определителя (рис. 1).



Формула (3) показывает, что со своими знаками берутся произведения элементов главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых ей параллельны; с противоположными – произведения элементов побочной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, которые ей параллельны.

**Пример.** Вычислить определитель третьего порядка:

Решение. Пользуясь правилом треугольников, получим



1.Определите тип матриц: 2)

3) 4) 5)

2.Найти 3А+2В, если А=, В=

3.Найти А2- 3А+5Е, если А=,

4.Найти произведение матриц:

1) А= и В=

2) А= и В=

3) А= и В=

5.Вычислить определители**:**

1) 2) 3) 4)

5) 6) 7) 8)

**Практическая работа №3**

**Тема: «Исследование функции на выпуклость, вогнутость, асимптоты»**

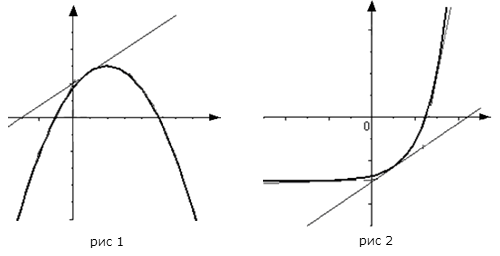
**Цель:** изучить понятия: выпуклость функции, вогнутость функции, промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба;

закрепление практических навыков решения задач с применением второй производной

Выпуклость функции, точки перегиба

График функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, дифференцируемой на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png, является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).

График функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, дифференцируемой на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png, является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).



**Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба**

**(Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции)**

Пусть функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png определена на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png и имеет непрерывную, не равную нулю в точкеhttp://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2180.png вторую производную. Тогда, если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2106.png всюду на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png, то функция имеет **вогнутость на этом интервале**, если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2107.png, то функция имеет **выпуклость**.**ОТочкой перегиба** графика функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png называется точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2108.png, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

**(О необходимом условии существования точки перегиба)**

Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png имеет перегиб в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2108.png, то http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2109.png или не существует.

**Теорема**

**(О достаточном условии существования точки перегиба)**

Если:

1. первая производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1585.png [непрерывна в окрестности точки](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_21.php) http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1064.png;
2. вторая производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2110.png или не существует в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1064.png;
3. http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1733.png при переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1064.png меняет свой знак,тогда в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2108.png функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png имеет перегиб.

**Схема исследования функции на выпуклость, вогнутость**

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

**Задание.** Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2111.png

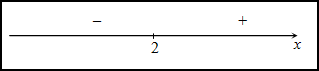
**Решение.** Найдем вторую производную заданной функции:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2112.png

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2113.png:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2114.png

Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2116.png вторая производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2117.png, то на этом промежутке функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2118.pngвыпукла; в силу того, что на промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2119.png вторая производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2120.png - функция вогнута. Так как при переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2121.png вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

**Ответ.** Точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2121.png - точка перегиба графика функции.

На промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2116.png функция выпукла, на промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2119.png функция вогнута.

Асимптоты графика функции

**Виды асимптот**

Прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2073.png называется вертикальной асимптотой графика функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, если хотя бы одно из предельных значений http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2122.png или http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2123.png равно http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2124.png или http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2125.png .

Замечание. Прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2073.png не может быть вертикальной асимптотой, если функция [непрерывна в точке](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_21.php) http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2073.png . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.Опреление

Прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2126.png называется горизонтальной асимптотой графика функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, если хотя бы одно из предельных значений http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2127.png или http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2128.png равно http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2129.png .

**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую. Прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2130.png называется **наклонной асимптотой** графика **функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, еслиhttp://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2131.png**

**Нахождение наклонной асимптоты**

**Теорема**(условиях существования наклонной асимптоты)

Если для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png существуют пределы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2132.png и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2133.png, то функция имеет наклонную асимптоту http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2130.png при http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1287.png .

**Замечание**Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2134.png .

**Замечание**Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается, что http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2135.png, то функция может иметь наклонную асимптоту.

**Замечание**

Кривая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.

**Задание.** Найти асимптоты графика функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2136.png

**Решение.** Область определения функции:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2137.png

а) вертикальные асимптоты: прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1327.png - вертикальная асимптота, так как

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2138.png

б) горизонтальные асимптоты: находим [предел функции на бесконечности](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_11.php):

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2139.png

то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2130.png:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2140.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2141.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2142.png

Таким образом, наклонная асимптота: http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2143.png .

**Ответ.** Вертикальная асимптота - прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1327.png .

Наклонная асимптота - прямая http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2143.png .

**ЗАДАНИЕ 1.** Исследование функции на выпуклость и точки перегиба.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.1** |  | **1.6** |  | **1.11** |  |
| **1.2** |  | **1.7** |  | **1.12** |  |
| **1.3** |  | **1.8** |  | **1.13** |  |
| **1.4** |  | **1.9** |  | **1.14** |  |
| **1.5** |  | **1.10** |  | **1.15** |  |

**Практическая работа №4**

**Тема: «Исследование функции по общей схеме».**

**ЦЕЛЬ:** формирование навыков исследования по общей схеме функции, заданной аналитически;

формирование навыков построения графика функции по известным ее свойствам.

**Общая схема исследования функции, заданной аналитически:**

1. Область определения и точки разрыва.
2. Четность и нечетность функции, периодичность.

Для определения четности/нечетности функции в данную функцию подставляют (*-х*) и проверяют выполнение условий:



Для выяснения периодичности следует проверить выполнение условия:

***f*(*x* - T) = *f*(*x*) = *f*(*x* + T)** , где Т – период.

1. Точки пересечения графика с осями координат *Ох* и *Оу*:

а) с осью О*х*: *у* = 0;

б) с осью О*у*: *х* = 0.

1. Промежутки знакопостоянства.

Монотонность функции и экстремумы. **Достаточное условие возрастания (убывания функции).** Пусть функция http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_1.gifдифференцируема на интервале http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/ab_skobki.gif. Если во всех точках этого интервала http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_56.gif, то функция возрастает на этом интервале, а если http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_57.gif, то функция убывает на этом интервале.

Точка *x* = *x*0 называется **точкой максимума**, а число http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/fx0.gif- **максимумом функции**, если для всех точек из некоторой окрестности точки *x*0, не совпадающих с *x*0 , выполняется неравенство http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_58.gif.

Точка *x* = *x*0 называется **точкой минимума**, а число http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/fx0.gif- **минимумом функции**, если для всех точек из некоторой окрестности точки *x*0 , не совпадающих с точкой *x*0 , выполняется неравенство http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_59.gif.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.

**Достаточное условие существования экстремума.** Если функция http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_1.gifнепрерывна в точке *x* = *x*0 , дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, и при переходе через точку *x*0 производная http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/f_prime_x.gifменяет знак,

то *x* = *x*0 - точка:

**а)** http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/fx0.gif— максимум, если http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_60.gif, при http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_61.gif и http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_62.gif, при http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_63.gif.

**б)** http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/fx0.gif— минимум, если http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_64.gif, при http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_61.gif и http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_60.gif, при http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_63.gif.

**Достаточные условия точки перегиба.** Если функция http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_1.gifдважды дифференцируема, график этой функции имеет в этой точке касательную и при переходе через эту точку http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_81.gifменяет знак, то *x*0 - точка перегиба графика функции http://www.e-college.ru/xbooks/xbook052/files/Eqn8_1.gif.

1. Выпуклость функции и точки перегиба. (Смотри практическую работу №3)
2. Асимптоты графика:

а) вертикальные асимптоты;

 или  *х* = *а*

б) горизонтальные асимптоты;

 или  *х* = *b*

в) наклонные асимптоты.

 ,  *y* = *kx* + *b*

**УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ.** Заданную функции исследуйте по общей схеме и по полученным данным постройте её график. Если недостаточно, то рассмотрите дополнительные точки.

**Задание*.*** Исследуйте функцию по общей схеме и постройте её график.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** |  | **11** |  | **21** |  |
| **2** |  | **12** |  | **22** |  |
| **3** |  | **13** |  | **23** |  |
| **4** |  | **14** |  | **24** |  |
| **5** |  | **15** |  | **25** |  |
| **6** |  | **16** |  | **26** |  |
| **7** |  | **17** |  | **27** |  |
| **8** |  | **18** |  | **28** |  |
| **9** |  | **19** |  | **29** |  |
| **10** |  | **20** |  | **30** |  |

**Практическая работа № 5**

**«Метод замены переменной в неопределенном интеграле »**

**Цель работы**: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием

**Первообразная функции. Неопределенный интеграл**

Функция , определенная на интервале , называется *первообразной* для функции , определенной на том же интервале , если 

Если  — первообразная для функции , то любая другая первообразная для функции  отличается от  на некоторое постоянное слагаемое, т. е.  где .

*Неопределенным интегралом* от функции  называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл:  где 

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. 

2. 

3. 

4. 

***Таблица основных интегралов***

1.  2. 

3.  

4.  5. 

6.  7.

8.  9. 

10.  11. 

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

**Метод замены переменной**

*Теорема 1.* Пусть монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда  (1)

При этом, если  то  где — функция, обратная .

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

*Алгоритм замены переменной:*

1) Связать старую переменную интегрирования  с новой переменной  с помощью замены .

2) Найти связь между дифференциалами .

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив 

*Пример1.* Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

**  **

*Решение:*







**Задание 1**. Проинтегрировать функции заменой переменной:

1)   

2)   

3)   

4)   

5)   

6)   

**Практическая работа №6**

**Тема: "Методы вычисления определенного и неопределенного интеграла"**

**Цель работы: з**акрепление практических навыков нахождения неопределённых интегралов

## Неопределённый интеграл и непосредственное интегрирование.

***Определение первообразной и неопределенного интеграла***

Функция *F*(*x*) называется *первообразной* функции *f*(*x*), если

http://www.math24.ru/images/1int1.gif

Множество всех первообразных некоторой функции *f*(*x*) называется *неопределенным*

*интегралом* функции *f*(*x*) и обозначается как

http://www.math24.ru/images/1int2.gif

Таким образом, если *F* - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

http://www.math24.ru/images/1int3.gif

где С - произвольная постоянная.

***Свойства неопределенного интеграла***

В приведенных ниже формулах *f* и *g* - функции переменной *x*, *F* - первообразная функции *f*,   
*а, k, C* - постоянные величины.

http://www.math24.ru/images/1int4.gif

http://www.math24.ru/images/1int5.gif

http://www.math24.ru/images/1int6.gif

http://www.math24.ru/images/1int7.gif

## *Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.*

***Таблица интегралов***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | | Image171 | 11 | Image172 |
| 2 | | Image173 | 12 | Image174 |
| 3 | | Image175(Image176). | 13 | Image177. |
| 4 | | Image178 | 14 | Image179 |
| 5 | | Image180; Image181 | 15 | Image182 |
| 6 | | Image183 | 16 | Image184 |
| 7 | | Image185 | 17 | Image186 |
| 8 | | Image187 | 18 | Image188 |
| 9 | | Image189 | 19 | Image190 |
|  | | | |
|  | | | | | | |
| **Пример 1** | | | | | | |
|  | | | | | | |
| Вычислить http://www.math24.ru/images/1int39.gif.  http://www.math24.ru/images/1int40.gif | | | | | | |
| **Пример 2** | | | | | | |
|  | | | | | | |
| Вычислить интеграл http://www.math24.ru/images/1int41.gif.  Преобразуя выражение и применяя формулу для интеграла степенной функции, получаем  http://www.math24.ru/images/1int42.gif | | | | | | |
| **Пример 3** | | | | | | |
| Вычислить http://www.math24.ru/images/1int43.gif.  Используем табличный интеграл http://www.math24.ru/images/1int44.gif. Тогда  http://www.math24.ru/images/1int45.gif | | | | | | |
| **Пример 4** | | | | | | |
|  | | | | | | |
| Вычислить http://www.math24.ru/images/1int46.gif.  Воспользовавшись табличным интегралом http://www.math24.ru/images/1int47.gif, находим  http://www.math24.ru/images/1int48.gif | | | | | | |
| **Пример 5** | | | | | | |
| Вычислить интеграл http://www.math24.ru/images/1int49.gif без использования замены переменной.  *Решение.*  Используя формулу двойного угла sin 2*x* = 2 sin*x* cos*x* и тождество sin2*x* + cos2*x* = 1, получаем  http://www.math24.ru/images/1int52.gif | | | | | | |

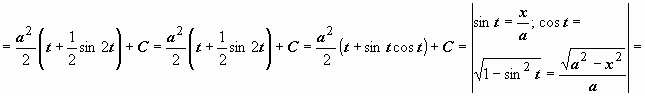
## Основные приемы интегрирования

Для вычисления неопределенных интегралов нет такого четкого алгоритма, как для вычисления производных. Кроме того, следует иметь в виду, что бесконечно много интегралов от элементарных функций не выражаются через эти элементарные функции, а представляют собой так называемые специальные функции. Поэтому, вычисление неопределенных интегралов скорее искусство, чем работа по алгоритму. Однако два общих приема все-таки имеются.

## Замена переменных.

Пусть надо вычислить http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan2/clip_image268.gif. Сделаем **замену переменных** http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan2/clip_image270.gif, так что http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan2/clip_image272.gif. Пусть нам каким-то образом удалось вычислить http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan2/clip_image274.gif. Тогда имеет место формула

http://www.allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan2/clip_image276.gif.

* **Пример 6.**
* Image245имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку) ***t*** = sin ***x***. Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную ***t***: Image246; в результате Image247Image248(возвращаемся к исходной переменной) Image249. Другие примеры:   
  Image250. Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую, чтобы корни извлеклись: Image251= Image252Image253
* **Пример 7.** Image0 Image254. Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлёкся. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену: Image255(или Image256, Image257): Image258. Интеграл свёлся к интегралу от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие Image259и Image260через косинус двойного угла: Image261. Image0Поэтому Image262Image264.  
  **Пример 8.**

dx==dt=dt=+С=+С

***Определенный интеграл, его свойства и вычисление.***

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

= F(a)-F(b)

- соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, они пишутся и читаются снизу вверх, а в формулу подставляются сверху вниз!)

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

1. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:
2. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.==27-8=19.

**Задание 1**. Вычислить интегралы.

1)  

2)  

**Задание 2**. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1)   

2)   

3)   

**Задание 3.** Вычислите определенный интеграл.

1. 2.

**Практическая работа №7**

**«Применение определенного интеграла (геометрический смысл)»**

**Цель занятия**:закрепить и обобщить навыки вычисления неопределенного и определенного интегралов, площади криволинейной трапеции

**Геометрический смысл определенного интеграла:** определенный интеграл численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной:

|  |  |
| --- | --- |
|  | * прямыми х = а и х = b; * осью Ох ( у = 0); * частью графика непрерывной и неотрицательной функции |

**Формула Ньютона-Лейбница** 

**Основные случаи расположения плоской фигуры**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |

**Некоторые приложения определенного интеграла.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | *Объем тела вращения* | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | | |  | |
|  |  | V *y* = *f*(*x*)  a, b | | | | | - -  - | | объем тела вращения, м3; функция, график которой есть кривая, вращающаяся вокруг оси ОХ и образующая;  пределы интегрирования. | | | | | | |
| **2** | Путь, пройденный точкой | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | S | | | | | | | | - | | | путь, пройденный точкой, м; | | |
|  |  | *υ* = *f*(t) ≥ 0 | | | | | | | | - | | | переменная скорость, м/с2; | | |
|  |  | [t1; t2] | | | | | | | | - | | | рассматриваемый промежуток времени. | | |
| **3** | *Работа силы* | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | А | | | | | | - | | | работа силы, Дж; | | | | |
|  |  | F = F(*x*) | | | | | | - | | | переменная сила, действующая при перемещении оси ОХ материальной точки; | | | | |
|  |  | [a; b] | | | | | | - | | | перемещение материальной точки. | | | | |
|  | При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | | | | | | | | | | | *F* = k*x* | | |  |
|  |  | F | - | сила, Н; | | | | | | | | | | | |
|  |  | *х* | - | абсолютное удлинение пружины (м), вызванной силой F (Н); | | | | | | | | | | | |
|  |  | k | - | коэффициент пропорциональности, н / м. | | | | | | | | | | | |
| **4** | *Сила давления жидкости* | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | Р | | | - | сила давления жидкости, Н; | | | | | | | | | |
|  |  | ρ | | | - | плотность жидкости, кг/м3; | | | | | | | | | |
|  |  | g | | | - | ускорение свободного падения, g ≈ 9,81 м/с2; | | | | | | | | | |
|  |  | S(*x*) | | | - | переменная площадь площадки, м2; | | | | | | | | | |
|  |  | *a* ≤ *х* ≤ *b* | | | - | глубина погружения площадки, м. | | | | | | | | | |

Указание к заданию 1. В одной системе координат постройте заданные линии и определите фигуру, площадь которой следует найти. Ориентируясь на полученное изображение и приравнивая соответствующие линии, найдите пределы интегрирования. Выберите формулу из таблицы расположения плоских фигур и подсчитайте площадь.

Указание к заданию 2. В одной системе координат постойте заданные линии и определите фигуру, которую следует вращать. Найдите пределы интегрирования. Подставьте все найденные значения в формулу объема и вычислите его.

Указание к заданию 3. Используя формулы из таблицы приложений определенного интеграла, вычислить значение нужной величины.

Указание к заданию 4. Используя формулы из таблицы приложений определенного интеграла, вычислить значение нужной величины.

**Задание 1*.*** Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.1** | , | **1.9** | . |
| **1.2** | и . | **1.10** | . |
| **1.3** | и . | **1.11** | . |
| **1.4** | и осью абсцисс. |  |  |
| **1.5** | и . |  |  |
| **1.6** | и . |  |  |
| **1.7** | . |  |  |
| **1.8** | и . |  | |

**Задание 2.** Вычисление объема тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **2.1** | и . | **2.9** |  |
| **2.2** | . | **2.10** |  |
| **2.3** | . |  |  |
| **2.4** | . |  |  |
| **2.5** | . |  |  |
| **2.6** | . |  |  |
| **2.7** | . |  |  |
| **2.8** | . |  | |

**Задание 3**. Вычисление пути, пройденного точкой.

|  |  |
| --- | --- |
| **3.1** | Тело движется прямолинейно со скоростью  (V – в м/с). Найдите длину пути, пройденного телом за 5-ю секунду его движения. |
| **3.2** | Точка движется прямолинейно с ускорением  (а – в м/с2). Найти уравнение скорости, если  м/с. |
| **3.3** | Скорость движения тела меняется по закону  (V – в м/с). Найти закон движения тела, если  м. |
| **3.4** | Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением  (V – в м/с). Вычислите его путь, пройденный телом за четвертую секунду. |
| **3.5** | Найдите путь, пройденный движущимся по прямой телом от начала движения до остановки, если скорость его определяется по формуле . (V – в м/с) |

**Задание 4.** Вычисление работы силы.

|  |  |
| --- | --- |
| **4.1** | Сила в 1 Н сжимает пружину на 1 см. Вычислите работу при сжатии пружины на 19 см. |
| **4.2** | Вычислите работу, которую нужно совершить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см. |
| **4.3** | Вычислить работу, которую можно затратить на сжатие пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила в 78 Н. |
| **4.4** | Сила в 60 Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см? |
| **4.5** | Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 9,8 Н растягивает ее на 2 см. Определить силу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см. |

**Практическая работа № 8,№9**

**Тема: «Действия с комплексными числами в трех формах »**

**Цель** формирование навыков выполнения арифметических действий над комплексными числами;

формирование навыков перехода от одной формы комплексного числа к другой и обратно;

формирование навыков выполнения арифметических действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

***Алгебраическая*** форма записи .

***Мнимой единицей*** называется величина .

***Тригонометрическая***форма записи , где - ***модуль*** комплексного числа и , - ***аргумент*** комплексного числа и и .

***Показательная*** форма записи , где .

Решение ***квадратного уравнения*** при :

|  |  |
| --- | --- |
| если | два равных действительных корня |
| если | два различных действительных корня и |
| если | два различных комплексных корня  и . |

**Действия над комплексными числами**

**и**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Действие** | **Алгебраическая форма** | **Тригонометрическая**  **форма** | **Показательная форма** |
| **сравнение** |  |  |  |
| **сложение** |  | ------------------ | --------------------- |
| **вычитание** |  | ------------------ | --------------------- |
| **умножение** |  |  |  |
| **деление** |  |  |  |
| **возведение в степень** | Используя формулы сокращенного умножения и |  |  |
| **извлечение корня n-ой**  **степени** | ------------------ | ,  где |  |

**Таблица значений тригонометрических функций числового аргумента**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  | 1 | 0 | -1 |
|  | 1 |  |  |  | 0 | -1 | 0 |
|  | 0 |  | 1 |  | - | 0 | - |
|  | - |  | 1 |  | 0 | - | 0 |

**УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ 1.** Решите заданные квадратные уравнения, учитывая при вычислении дискриминанта .

**УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ 2.** Используя основные формулы для выполнения арифметических действий над комплексными числами, выполните действия в алгебраической форме.

**УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ 3.** Переведите заданные комплексные числа в тригонометрическую форму и выполните заданные действия над числами в этой форме.

**УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ 4.** Переведите комплексные числа в показательную форму и выполните заданные действия над ними в этой форме.

**ЗАДАНИЯ**

**Задание 1*.*** Решение квадратных уравнений.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.1** |  | **1.9** |  |
| **1.2** |  | **1.10** |  |
| **1.3** |  | **1.11** |  |
| **1.4** |  | **1.12** |  |
| **1.5** |  | **1.13** |  |
| **1.6** |  | **1.14** |  |
| **1.7** |  | **1.15** |  |
| **1.8** |  |  | |

**ЗАДАНИЕ 2.** Выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **2.1** |  | **2.9** |  |
| **2.2** |  | **2.10** |  |
| **2.3** |  | **2.11** |  |
| **2.4** |  | **2.12** |  |
| **2.5** |  | **2.13** |  |
| **2.6** |  | **2.14** |  |
| **2.7** |  | **2.15** |  |
| **2.8** |  |  | |

**ЗАДАНИЕ 3.** Выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической форме: , где - номер варианта.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3.1.** |  | **3.9.** |  |
| **3.2.** |  | **3.10.** |  |
| **3.3.** |  | **3.11** |  |
| **3.4** |  | **3.12** |  |
| **3.5** |  | **3.13** |  |
| **3.6** |  | **3.14** |  |
| **3.7** |  | **3.15** |  |
| **3.8** |  |  | |

**ЗАДАНИЕ 4.** Выполнение действий над комплексными числами в показательной форме: , где - номер варианта.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **4.1** |  | **4.9** |  |
| **4.2** |  | **4.10** |  |
| **4.3** |  | **4.11** |  |
| **4.4** |  | **4.12** |  |
| **4.5** |  | **4.13** |  |
| **4.6** |  | **4.14** |  |
| **4.7** |  | **4.15** |  |
| **4.8** |  |  | |

**Практическое занятие №10**

**Тема: Дискретные случайные величины**

**Цель:** закрепление практических навыков решения задач на построение закона распределения дискретной случайной величины по заданному условию.

**Указания:** Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение случайной величины х1 | х1 | х2 | … | хn |
| Вероятности значений р1 | р1 | р2 | … | рn |

Так как в результате испытания случайная величина Х всегда примет одно из своих возможных значений х1, х2, … хn, то эти случайные события образуют полную группу событий и

*р1 + р2 + …+ рn = = 1.*

**Числовые характеристики случайной величины:** математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение

**Математическое ожидание** дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных её значений на соответствующие вероятности:

M(X) = x1p1 + x2p2 + … + xnpn =

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины Х от её математического ожидания М (Х) называют **дисперсией** случайной величины Х и обозначают D(X), т.е.

D(X) = M(X – M(X))2

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и её неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии – **среднее квадратическое отклонение.**

σ (сигма) =

Пример1Случайная величина *Х* задана рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | -3 | 0 | 1 | 4 |
| pi | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |
|  | 9 | 0 | 1 | 16 |

Найти математическое ожидание *МХ*, дисперсию *DX,* σx, вероятности Р (Х < 0), P (X > 0), P(-1 < X < 3). Y = 2X – 3. Найти математическое ожидание *MY*, дисперсию *DY*, σy.

Решение: Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  п/п | Алгоритм | Конкретное соответствие данной ситуации  предложенному алгоритму. |
| 1 | Вычисляется математическое ожидание . | МХ = (-3) ∙ 0,1 + 0 ∙ 0,3 + 1 ∙ 0,4 + 4 ∙ 0,2 =  = - 0,3 + 0 + 0,4 + 0,8 = 0,9. |
| 2 | Вычисляется дисперсия  и σx. | DX = 9 ∙ 0,1 + 0 ∙ 0,3 + 1 ∙ 0,4 + 16 ∙ 0,2 – 0,92 =  = 0,9 + 0,4 + 3,2 – 0,81 = 3,69;  σx = . |
| 3 | Вычисляются Р(Х < 0), P(X > 0),  P( −1 < X < 3). | Р(Х < 0) = Р(Х = -3) = 0,1;  P(X > 0) = Р(Х = 1) + Р(Х = 4) = 0,4 + 0,2 = 0,6;  P( −1 < X < 3) = Р(Х = 0) + Р(Х = 1) = 0,3 + 0,4 = 0,7. |
| 4 | Вычисляются MY,  дисперсия DY, σy. | M(AX + b) = M(2X – 3) = 2 ∙ MX – 3 = 2 ∙ 0,9 – 3 = −1,2 ;  D(aX + b) = D(2X – 3) = D(2X) = 4DX = 14,76;  σx  = . |

**Задание:** выполнить задание своего варианта

**Вариант 1**

Найти математическое ожидание *МХ*, дисперсию *DX,* σx, вероятности Р (Х < 0), P (X > 0), P(-1 < X < 3). Y = 4X – 3. Найти математическое ожидание *MY*, дисперсию *DY*, σy.

**Вариант 2**

Имеются три урны. В первой урне два белых шара и один черный. Во второй урне три белых шара и один черный. В третьей урне четыре белых шара и один черный. Наудачу выбирается урна и из неё наудачу вынимается шар. Если шар – белый, то вынимающий получает 100 руб. Если шар – черный, то вынимающий платит 1000 руб. Найти математическое ожидание, дисперсию *Х* – количества получаемых (отдаваемых) рублей.

**Вариант 3**

Теннисист идёт на игру. Если ему дорогу перебежит чёрная кошка, то вероятность победы – 0,2; если не перебежит, то – 0,7. Вероятность, что кошка перебежит дорогу – 0,1; что не перебежит – 0,9. Если выиграет теннисист, то он получает 1000 руб; если проиграет – ничего не получает. Найти математическое ожидание, дисперсию *Х* – количества получаемых (отдаваемых) рублей.

**Вариант 4**

Имеются две урны. В первой урне 5 белых шара и 5 чёрных. Во второй урне три белых шара и два черных. Наудачу выбирается урна и из неё наудачу вынимается шар. Если шар – белый, то вынимающий получает 100 руб. Если шар – черный, то вынимающий платит 1000 руб. Найти математическое ожидание, дисперсию *Х* – количества получаемых (отдаваемых) рублей.

**Вариант 5**

Стоимость лотерейного билета – 10 руб. Вероятность выигрыша на один лотерейный билет 10000руб – 0,001; 100руб – 0,01; 10руб – 0,1; 1руб – 0,5. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет, учтя, что на билет Вы потратили 10 рублей.